BÀI GIẢNG TOÁN CAO CẤP (HIGHER MATHEMATICS)

PHẦN I: ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH VÀ QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH (LINEAR ALGEBRAS AND LINEAR PROGRAMMING)

CHƯƠNG I. MA TRẬN, ĐỊNH THỨC VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH (MATRICES, DETERMINANTS AND SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS)

I.1. MA TRẬN (MATRICES)

Nội dung cơ bản

- Khái niệm ma trận. Các loại ma trận.
- Các phép toán đại số trên ma trận.
- Ma trân bạc thang dòng và các phép biến đổi sơ cấp dòng.
- *Ứng dụng ma trân để biểu diễn các dữ liệu trong thực tiễn.*
- Hạng của ma trận và cách tìm hạng ma trận.

Thuật ngữ then chốt (Việt – Anh)

- **Ma trận – Matrix**;
- **Ma trận vuông – Square Matrix**;
- **Ma trận đơn vị – Unit/Identity Matrix**;
- **Ma trận không – Zero Matrix**;
- **Ma trận tam giác – Triangular Matrix**;
- **Ma trận chéo – Diagonal Matrix**;
- **Ma trận bậc thang – Echelon Matrix**;
- **Biến đổi sơ cấp – Elementary Operations**;
- **Hạng của ma trận – Rank of Matrix**.

I.1.1. VÀI VÍ DỤ TRONG THỰC TIỄN

1. Bảng các chỉ tiêu

2. Lưu trữ các hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn

I.1.2. KHÁI NIỆM VỀ MA TRẬN VÀ VÀI LOẠI MA TRẬN

1. Khái niệm ma trận

Một ma trận cấp m×n (**matrix of size m×n**) (*m, n* tự nhiên dương) là một bảng gồm *m.n* số a_{ij} được sắp xếp thành *m* dòng và *n* cột dưới dạng

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ và được viết tắt bởi $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ hay $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

Phần tử a_{ij} là phần tử ở dòng *i* và cột *j* của ma trận A; *i* là chỉ số dòng, *j* là chỉ số cột của phần tử a_{ij} đó. Tùy vào các phần tử a_{ij} là số thực hay phức mà ma trận A cũng được gọi là ***ma trân thực*** hay ***ma***

trận phức. Trong suốt giáo trình này, ta ***chủ yếu chỉ xét ma trận thực*** nên ta sẽ chỉ gọi đơn giản là ***ma trận*** nếu điều này không gây ra sự hiểu nhầm nào.
Hai ma trận được xem là bằng nhau nếu chúng cùng cấp và mọi phần tử tương ứng đều như nhau. Tức là $\left[a_{ij}\right]_{m\times n} = \left[b_{ij}\right]_{m\times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$; i = 1, 2, …, m; j = 1, 2, …, n.

Ví dụ 1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ là ma trận cấp 2×3, ở đây $a_{13} = 3$, $a_{21} = 4$, … .

2. Vài loại ma trận

a) Ma trận vuông (square matrix): là ma trận có số dòng *m* bằng số cột *n* (*m* = *n* là số tự nhiên dương), khi đó thay vì nói ma trận cấp *n*×*n* ta chỉ nói đó là ma trận vuông cấp *n*.

Ví dụ 2. $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ là ma trận vuông cấp hai.

Trong ma trận vuông cấp *n*, người ta gọi các phần tử $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ là các phần tử thuộc đường chéo chính của ma trận.

b) Ma trận đơn vị (identity matrix or unit matrix): là ma trận vuông có tất cả các phần tử thuộc đường chéo chính đều bằng 1, các phần tử còn lại đều bằng 0, kí hiệu là $\mathbf{I_n}$ hay chỉ đơn giản là **I** khi cấp đã được chỉ rõ. Cũng có khi ký hiệu ma trận đơn vị là $\mathbf{E_n}$ hay **E**.

Ví dụ 3. $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ là các ma trận đơn vị cấp 2, cấp 3.

c) Ma trận tam giác (triangular matrix): là ma trận vuông có tất cả các phần tử nằm phía dưới, hoặc phía trên đường chéo chính đều bằng 0.

Ví dụ 4. C = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, D = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$ là các ma trận tam giác.

d) Ma trận chéo (Diagonal matrix)): là ma trận vuông có tất cả các phần tử nằm ngoài đường chéo chính bằng 0.

Ví dụ 5. E = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ là ma trận chéo.

e) Ma trận cột (column matrix or column): là ma trận chỉ có một cột.

f) Ma trận dòng (row matrix or row): là ma trận chỉ có một dòng.

Ví dụ 6. F = $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, G = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ lần lượt là ma trận cột, ma trận dòng.

g) Ma trận không (zero matrix): là ma trận có tất cả các phần tử đều bằng 0, kí hiệu là $\mathbf{O}_{m\times n}$ hay chỉ đơn giản là **O** khi cấp đã được chỉ rõ.

Ví dụ 7. $\mathbf{O}_{2\times 3}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ là ma trận không cấp 2×3.

Chú ý: Để tiện, ta sẽ dùng các ký hiệu Mat(m,n) và Mat(n) để chỉ tập hợp các ma trận (thực) cấp m×n và ma trận vuông cấp n tương ứng (m, n là các số nguyên dương).

I.1.3. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

1. Phép cộng ma trận (matrix addition): ***Tổng hai ma trận cùng cấp*** $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và $B = [b_{ij}]_{m\times n}$. là một ma trận cùng cấp, ký hiệu A + B, được xác định bởi $A + B := [c_{ij}]_{m\times n}$ với $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$; $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Ví dụ 8. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$. Thế thì $A + B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -1 & 6 & 9 \end{bmatrix}$.

Chú ý: Hai ma trận chỉ cộng được với nhau khi chúng có cùng cấp.

2. Phép nhân số với ma trận (scalar multiplication): Cho số a và ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. Tích của a với ma trận A là một ma trận cùng cấp, ký hiệu aA, được xác định bởi $aA := [b_{ij}]_{m\times n}$ với $b_{ij} = a.a_{ij}$; $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Ví dụ 9. Cho ma trận a = 2, $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Thế thì $2A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

3. Phép nhân ma trận (matrix multiplication): Cho hai ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và $B = [b_{jp}]_{n\times p}$. Tích của A với B là ma trận, kí hiệu AB, được xác định bởi $AB := [c_{ik}]_{m\times p}$ với $c_{ik} = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}b_{jk}$; $i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, p$.

Ví dụ 10. Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Thế thì $AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$ là ma trận vuông cấp hai. Ta tính các phần tử của AB.

Ta có

$$c_{11} = 1.2 + (-2).(-1) + 3.4 = 16, c_{12} = 1.3 + (-2).1 + 3.2 = 7,$$

$$c_{21} = 4.2 + 0.(-1) + 2.4 = 16, c_{22} = 4.3 = 0.1 + 2.2 = 16$$

Vậy $AB = \begin{bmatrix} 16 & 7 \\ 16 & 16 \end{bmatrix}$.

Chú ý

- **Hai ma trận chỉ nhân được với nhau khi số cột của ma trận đầu bằng số dòng của ma trận thứ hai.**
- **Muốn tìm phần tử ở dòng i, cột j của ma trận tích A.B, ta nhân các phần tử ở dòng i của ma trận A lần lượt với các phần tử ở cột j của ma trận B rồi cộng các tích đó lại.**

? Tại sao phép cộng hai ma trận và phép nhân một số với một ma trận định nghĩa rất tự nhiên nhưng phép nhân hai ma trận lại định nghĩa khá phức tạp như trên?

4. Phép chuyển vị ma trận (transpose of a matrix)

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. Ma trận thu được từ A bằng cách viết các dòng của A lần lượt thành các cột được gọi là ma trận chuyển vị của A và kí hiệu là A^t. Khi đó A^t là ma trận cấp n×m.

Ví dụ 11. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Thế thì $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Hiển nhiên ta có $(A^t)^t = A$, tức là sau hai lần chuyển vị ta lại trở về ma trận ban đầu.

5. Lũy thừa một ma trận vuông (powers of a matrix)

Khi A là một ma trận vuông, ta có thêm phép toán lũy thừa. Cụ thể, lũy thừa bậc n (n nguyên dương) của A là ma trân tích của n ma trận A, nghĩa là

$$A^n: = A.A. \dots A \quad \text{(n lần)} .$$

Tương tự như lũy thừa của các số thực, ta quy ước $A^0 = I$, trong đó A là ma trận vuông cấp bất kỳ và I là ma trận đơn vị cùng cấp với A.

Ví dụ 12. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Khi đó

$A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$; $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 27 \end{bmatrix}$; $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}$; n là số tự nhiên.

? Hãy kiểm chứng các kết quả nêu trên.

Chú ý: Thứ tự thực hiện các phép toán trên ma trận tương tự như đối với các số: nhân trước, cộng sau. Phép trừ được xem là hệ quả của phép cộng và phép nhân với một số: A – B: = A + (– 1)B.

CÁC TÍNH CHẤT

Giả sử các phép toán dưới đây đều thực hiện được với các ma trận A, B, C và các số a, b. Khi đó ta có các tính chất sau đây:

A + B = B + A; A + **O** = **O** + A = A; A + (– A) = **O**; (A + B) + C = A + (B + C);
(AB)C = A(BC); 1.A = A; I.A = A.I = A; (ab)A = a(bA);
(a + b)A = aA + bA; a(A + B) = aA + aB; (A + B)C = AC + BC; A(B + C) = AB + AC;
$(A + B)^t = A^t + B^t$; $(AB)^t = B^tA^t$.

? Hãy chứng minh các tính chất nêu trên.

I.1.4. MA TRẬN BẬC THANG DÒNG VÀ CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP DÒNG

1. Ma trận bậc thang (dòng) (echelon matrix): là ma trận thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau đây

- Dòng có tất cả các phần tử bằng 0 (nếu có) luôn nằm phía dưới dòng có phần tử khác 0 (nếu có);
- Đối với hai dòng bất kỳ, nếu tính từ trái qua phải, phần tử khác 0 đầu tiên (nếu có) của dòng dưới luôn ở bên phải so với phần tử khác 0 đầu tiên (nếu có) của dòng trên.

Ví dụ 13. $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ là các ma trận bậc thang.

? Ma trận **O** (cấp tùy ý), ma trận đơn vị có phải là ma trận bậc thang (dòng) không? Tại sao?

2. Các phép biến đổi sơ cấp dòng (BĐSC) trên các ma trận (elementary row operations)

Đó là một trong ba phép biến đổi sau đây trên mỗi ma trận

(E1): Đổi chỗ hai dòng cho nhau $d_i \leftrightarrow d_j$.

(E2): Nhân một dòng với một số khác không $d_i \to a.d_i$ ($a \neq 0$).

(E3): Thêm (bớt) vào một dòng một bội của dòng khác $d_i \to d_i + a.d_j$ (a tùy ý).

3. Tính chất quan trọng: Mọi ma trận khác không, sau một số hữu hạn các phép BĐSC, đều đưa được về một *ma trận bậc thang* mà được gọi là *dạng bậc thang* của ma trận ban đầu.

Chú ý: Dạng bậc thang của mỗi ma trận *không duy nhất* và thường có *nhiều cách* BĐSC để đưa một ma trận về dạng bậc thang.

I.1.5. *ỨNG DỤNG MA TRẬN TRONG THỰC TIỄN* (SV tự tìm hiểu)

I.1.6. HẠNG MA TRẬN VÀ CÁCH TÌM HẠNG

1. Mệnh đề: Đối với mỗi ma trận khác không A, dạng bậc thang dòng của nó dù không duy nhất nhưng *số dòng khác không* của mỗi dạng bậc thang của A luôn *bằng nhau* và chỉ phụ thuộc vào A chứ không phụ thuộc vào cách BĐSC thực hiện trên các dòng của A.

2. Hạng của ma trận (rank of a matrix): Cho ma trận A. Nếu A = O thì hạng của A bằng số 0. Nếu A khác O thì hạng của A chính là sô dòng khác không của mỗi dạng bậc thang của A. Hạng của A thường được ký hiệu là rank(A) hay chỉ đơn giản là r(A).

3. Cách tìm hạng của một ma trận khác không: Như vậy, đối với mỗi ma trận khác không A, để tìm hạng của nó trước hết ta BĐSC trên các dòng của A để đưa nó về dạng bậc thang. Sau đó đếm số dòng khác không của dạng bậc thang ta được hạng của A.

Chú ý: Nếu A là ma trận cấp m×n thì r(A) là số tự nhiên không vượt quá số bé trong hai số m, n. Tức là

$$0 \le r(A) \le \min(m, n).$$

? Hãy tự tìm hiểu xem khái niệm hạng ma trận có vai trò gì?

I.2. ĐỊNH THỨC (DETERMINANTS)

Nội dung cơ bản

- Khái niệm định thức.
- Các tính chất của định thức.
- Phương pháp tính định thức.

Thuật ngữ then chốt

- **Định thức cấp n** – **Determinant of order n**;
- **Ma trận khả nghịch** – **Invertible Matrix**;
- **Nghịch đảo của ma trận** – **Inverse of a matrix**.

I.2.1. NHÌN LẠI ĐỊNH THỨC CẤP 2, 3

1. Định thức cấp 2

Cho A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ là một ma trận vuông cấp 2 bất kỳ. ***Định thức (cấp 2) của A*** là một số, ký hiệu detA hay $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ được xác định bởi detA = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

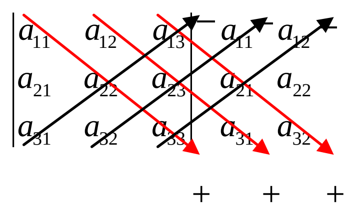
Nhận xét: Định thức cấp 2 được dùng để xác định tích có hướng của hai vectơ, diện tích hình bình hành và diện tích tam giác trong hình học.

2. Định thức cấp 3

Cho A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ là một ma trận vuông cấp 3 bất kỳ. ***Định thức (cấp 3) của A*** là một số, ký hiệu detA hay $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ được xác định bởi

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Để nhớ định nghĩa này, ta dùng công thức Sarrus được minh họa bằng sơ đồ dưới đây.



Nhận xét: Định thức cấp 3 được dùng để xác định tích hỗn tạp của ba vectơ, thể tích hình hộp (xiên) và thể tích khối tứ diện trong hình học.

I.2.2. ĐỊNH THỨC CẤP N (DETERMINANT OF ORDER N)

1. Khái niệm: Ta sẽ định nghĩa định thức cấp n tổng quát bằng quy nạp.

a) ***Định thức (cấp 1)*** của ma trận A = $[a_{11}]$ vuông cấp 1, ký hiệu detA, chính là số detA:= a_{11}.

b) Giả sử định thức (cấp n = k) của mỗi ma trận vuông cấp n = k ≥ 1 đã được xác định. Xét ma trận vuông cấp n = k + 1 tùy ý A = $\left[a_{ij}\right]_{k+1}$. ***Định thức (cấp n = k + 1)*** của A, ký hiệu detA, là một số được xác định như sau

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \ldots + a_{nn}A_{nn};$$

ở đây, A_{nj} là tích của $(-1)^{n+j}$ với định thức cấp k của ma trận nhận được từ A bằng cách xóa đi dòng n và cột j; j = 1, 2, …, n.

Như vậy, theo nguyên lý quy nạp, ta đã định nghĩa được định thức cấp n (≥ 1) bất kỳ.

2. Ví dụ

Ví dụ 1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} = -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

(**trùng lại định nghĩa sơ cấp**!).

Ví dụ 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$

$$= a_{31}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{32}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

(**trùng lại định nghĩa sơ cấp!**).

Ví dụ 3. Cho ma trận vuông cấp bốn $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Khi đó $\det A = 0A_{41} - 3A_{42} + 1.A_{43} - 2A_{44}$. Ở đây

$$A_{42} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1;\ A_{43} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 15;\ A_{44} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 7.$$

Vậy detA = – 2.

I.2.3. CÁC TÍNH CHẤT CỦA ĐỊNH THỨC

1. Định thức không thay đổi qua phép chuyển vị: detA = det(A^t).
2. det(AB) = detA.detB với mọi cặp ma trận A, B vuông cùng cấp.
3. Nếu có một dòng (hoặc một cột) không thì định thức bằng 0.
4. Nếu có hai dòng (hoặc hai cột) giống nhau hay tỉ lệ với nhau thì định thức bằng 0.
5. Định thức của ma trận tam giác hay ma trận chéo bằng tích các phần tử thuộc đường chéo chính.
6. Nếu đổi chỗ hai dòng (hoặc hai cột) bất kì thì định thức đổi dấu.
7. Nếu nhân một dòng (hoặc một cột) bất kỳ với một số thì định thức cũng được nhân với số đó. Nói cách khác, nhân tử chung của một dòng (hoặc một cột) có thể đem ra ngoài định thức.
8. Định thức không thay đổi khi thêm hoặc bớt vào một dòng (hoặc một cột) một bội của một dòng (hay cột) khác.
9. Công thức Laplace khai triển định thức theo một dòng hay cột bất kỳ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \quad \text{(Khai triển theo dòng i)}$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \quad \text{(Khai triển theo cột j)}$$

Ở đây, A_{ij} là **tích của $(-1)^{i+j}$ với định thức của ma trân nhận được từ A bằng cách xóa đi dòng i, cột j**; A_{ij} được gọi là ***phần bù đại số*** của phần tử a_{ij} hay vị trí (i, j); i, j = 1, 2, …, n.

I.2.4. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH ĐỊNH THỨC

1. Dùng các phép biến đổi sơ cấp: Để tính định thức của ma trân vuông bất kỳ, trước hết ta BĐSC để đưa ma trận đó về dạng tam giác (trên), sau đó lấy tích các phần tử thuộc đường chéo chính (theo tính chất 5). Tất nhiên, trong quá trình BĐSC, ta luôn đánh giá được sự thay đổi giá trị của định thức (nhờ các tính chất 6, 7, 8).

Ví dụ 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{vmatrix} = 160.$$

2. Dùng công thức Laplace: Nếu phát hiện thấy định thức có một dòng hay cột nào đó chứa nhiều số 0 thì nên khai triển định thức theo dòng hay cột đó.

Ví dụ 5. Tính $D(x) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & x^{2013} \\ 0 & (x+1)^{2013} & 0 & x^{2012} \\ x & (x-2)^{2012} & 1 & x^{2011} \\ -x & (x-3)^{2011} & x & x^{2010} \end{vmatrix}$ và tìm ẩn số thực x để D(x) = 0.

<u>**Giải**</u>

$$D(x) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & x^{2013} \\ 0 & (x+1)^{2013} & 0 & x^{2012} \\ x & (x-2)^{2012} & 1 & x^{2011} \\ -x & (x-3)^{2011} & x & x^{2010} \end{vmatrix} = -x^{2013} \begin{vmatrix} 0 & (x+1)^{2013} & 0 \\ x & (x-2)^{2012} & 1 \\ -x & (x-3)^{2011} & x \end{vmatrix} = x^{2013}(x+1)^{2013} \begin{vmatrix} x & 1 \\ -x & x \end{vmatrix}$$

$$= x^{2013}(x+1)^{2013}\left(x^2+x\right) = x^{2014}(x+1)^{2014}.$$

$D(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, -1\}$.

3. Phương pháp tổng hợp: Trong thực hành, ta thường phối hợp BĐSC với khai triển. Đôi khi còn phải biến đổi tinh tế nữa.

Ví dụ 6. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 9 & 16 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 11 & 19 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 8 \\ 5 & 11 & 19 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 25.$

I.2.5. MA TRẬN KHẢ NGHỊCH (INVERTIBLE MATRIX)

1. Khái niệm: Ma trận vuông A được gọi là ***có nghịch đảo*** hay ***khả nghịch*** nếu tìm được một ma trận B vuông cùng cấp sao cho AB = BA = I (ma trận đơn vị cùng cấp với A, B). Lúc đó B được gọi là (ma trận) ***nghịch đảo*** của A (***inverse*** of A) và ký hiệu là A^{-1}.

Như vậy, nếu A khả nghịch thì $A A^{-1} = A^{-1}A = I$

2. Nhận xét

a) Ta chỉ xét đến tính khả nghịch của ma trận vuông.

$\boxed{?}$ Hãy tự lý giải tại sao?

b) Ma trận vuông không **O** đương nhiên không khả nghịch.

c) Không phải ma trận khác không nào cũng khả nghịch.

d) Có thể chứng minh được AB = I $\Rightarrow$ BA = I.

? Hãy tự chứng minh khẳng định này.

Ví dụ 7. Ma trận $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ không khả nghịch.

? Hãy tự kiểm chứng điều này bằng định nghĩa.

3. Mệnh đề (về điều kiện khả nghịch)

Đối với mỗi ma trận vuông A, các khẳng định sau tương đương

(i) A khả nghịch.

(ii) detA $\neq$ 0.

(iii) rank(A) đúng bằng cấp của A.

? Hãy tự chứng minh mệnh đề này.

Ví dụ 8. Tìm *m* để ma trận A = $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ 0 & m^2 & 1 \end{bmatrix}$ khả nghịch.

Giải

detA = – m^2 + m + 2; detA = 0 $\Leftrightarrow$ m $\in$ { – 1, 2}.

Vậy A khả nghịch khi và chỉ khi $-1 \neq m \neq 2$.

4. Thuật toán tìm ma trận nghịch đảo

Bài toán: Cho ma trận vuông A. Tìm nghịch đảo của A nếu có.

a) Thuật toán dùng định thức và phần bù đại số

- **Bước 1:** Tính D = detA.
  + Nếu D = 0 thì kết luận A không khả nghịch. Thuật toán **dừng.**
  + Nếu D $\neq$ 0 thì A khả nghịch. **Làm tiếp bước 2**.
- **Bước 2:** Tìm ma trận phụ hợp P_A của A.
  Ma trận phụ hợp P_A của A là ma trận tạo thành từ các phần bù đại số của các phần tử của A, tức là $P_A = [A_{ij}]_n$, ở đây A_{ij} là phần bù đại số của vị trí (i, j); i, j = 1, 2, …, n.
- **Bước 3:** Xác định ma trận nghịch đảo $A^{-1} = \frac{1}{D}P_A^t$, ở đây P_A^t là chuyển vị của P_A.

Ví dụ 9. Tìm nghịch đảo (nếu có) của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Giải + Ta có D = detA = – 6 $\neq$ 0. Do đó A khả nghịch.

+ $A_{11} = 11$, $A_{12} = -12$, $A_{13} = -7$; $A_{21} = -7$, $A_{22} = 6$, $A_{23} = 5$.
$A_{31} = -1$, $A_{32} = 0$, $A_{33} = -1$.

$$P_A = \begin{bmatrix} 11 & -12 & -7 \\ -7 & 6 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \qquad P_A^t = \begin{bmatrix} 11 & -7 & -1 \\ -12 & 6 & 0 \\ -7 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vậy $$A^{-1} = \frac{1}{D}P_A^t = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 11 & -7 & -1 \\ -12 & 6 & 0 \\ -7 & 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{6} & \frac{7}{6} & \frac{1}{6} \\ 2 & -1 & 0 \\ \frac{7}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

b) Thuật toán BĐSC

Bài toán: Cho ma trận vuông A. Tìm nghịch đảo của A nếu có.

- **Bước 1:** Lập ma trận [A | I] bằng cách thêm vào bên phải A ma trận đơn vị cùng cấp.
- **Bước 2:** BĐSC trên các dòng của [A| I] để đưa nó về dạng [I |B] (B là ma trận nào đó).

 + Nếu không thể biến đổi được như thế, tức là trong quá trình BĐSC, ma trận bên trái xuất hiện một dòng không, thì kết luận A không khả nghịch.

 + Nếu biến đổi được như thế thì kết luận A khả nghịch với A^{-1} = B.

Ví dụ 10. Tìm nghịch đảo (nếu có) của ma trận A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$.

<u>Giải</u> + [A | I] = $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

+ BĐSC (trên các dòng của) ma trận này ta được

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Vậy A khả nghịch với $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

I.3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH (SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS)

Nội dung cơ bản

- Khái niệm về hệ phương trình tuyến tính (PTTT).
- Dạng ma trận của hệ PTTT. Điều kiện có nghiệm.
- Hệ Cramer và công thức Cramer.
- Hệ tổng quát và phương pháp Gauss.
- Hệ thuần nhất. Điều kiện có nghiệm không tầm thường.
- Liên hệ giữa hệ tổng quát và hệ thuần nhất.

Thuật ngữ then chốt

- **Hệ phương trình tuyến tính** – **System of Linear Equations**;
- **Hệ Cramer** – **Cramer System**;
- **Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất** – **Homogeneous System of Linear Equations**.

I.3.1. KHÁI NIỆM

1. *Hệ phương trình tuyến tính tổng quát m phương trình, n ẩn số*: là hệ phương trình có dạng

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 & (2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m & (m) \end{cases}$$

trong đó a_{ij}, b_i là các số cho trước mà lần lượt được gọi là các hệ số (của ẩn) và hệ số tự do, x_j là các ẩn số, i = 1, 2, …, m; j = 1, 2, …, n.

***Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính* (I):** là một bộ gồm n số được sắp thứ tự $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sao cho khi thay $x_j = a_j$ (j = 1, 2, …, n) vào tất cả các phương trình trong hệ, ta được các đẳng thức đúng. Hệ có thể vô nghiệm, có thể có nghiệm duy nhất hoặc vô số nghiệm.

Giải một hệ PTTT là việc đi tìm tập hợp nghiệm của hệ đó.

2. Dạng ma trận của hệ PTTT

Xét lại hệ (I) nêu trên. Ta sẽ đưa vào một số ma trận mà cần cho việc giải hệ (I).

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ là ma trận gồm tất cả các hệ số của ẩn và được gọi là ***ma trận hệ số***.

$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ là ma trận gồm các hệ số tự do và được gọi là ***cột tự do*** hay ***cột vế phải***.

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ là ma trận gồm các ẩn số và được gọi là ***cột ẩn*** (số).

Khi đó, hệ phương trình (I) được viết ở dạng ma trận: AX = B.

Ngoài ra, khi xét hệ (I), ma trận [A| B] (m dòng, n + 1 cột) nhận được bằng cách ghép thêm cột tự do B vào bên phải ma trận hệ số A sẽ đóng vai trò quan trọng. Ma trận [A| B] được gọi là ***ma trận mở rộng*** hay ***ma trận bổ sung*** của hệ (I).

Ví dụ 1. Xét hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$

Ở đây, ta có

+ Ma trận hệ số $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; ma trận mở rộng $[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 11 \end{array}\right]$;

+ Cột tự do B = $\begin{bmatrix} -1 \\ 11 \end{bmatrix}$; cột ẩn số X = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

Thay $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ vào hai phương trình của hệ ta được các đẳng thức đúng. Vậy (3,1,2) là một nghiệm của hệ đã cho.

Nghiệm này còn viết ở dạng cột $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Ta có thể thử lại bằng cách xét tích các ma trận tương ứng:

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 11 \end{bmatrix} = B.$$

I.3.2. ĐIỀU KIỆN CÓ NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH

1. Định lý Kronecker – Capelli

(Hệ phương trình (I) có nghiệm) $\Leftrightarrow$ (rank(A) = rank([A| B])).

Ví dụ 2. Xét hệ phương trình ở Ví dụ 1 trên, ta có ma trận mở rộng:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 11 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & 13 \end{array}\right]$$

Suy ra rank(A) = 2 = rank([A| B]). Do đó hệ có nghiệm (đúng như ta đã thấy ở ví dụ 1).

Ví dụ 3. Xác định giá trị của tham số thực *m* để hệ dưới đây có nghiệm.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 1; \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 8; \\ 4x_1 + 9x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 6; \\ 5x_1 + 11x_2 - 7x_3 + 4x_4 - 6x_5 = m. \end{cases}$$

<u>**Giải**</u> Ma trận mở rộng của hệ là [A| B] = $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & -3 & 2 & 8 \\ 4 & 9 & -4 & 2 & -5 & 6 \\ 5 & 11 & -7 & 4 & -6 & m \end{array}\right]$.

Ở đây, ma trận bên trái là ma trận hệ số A, còn cột bên phải là cột tự do B. Ta BĐSC như sau:

$$[A|B] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -7 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 8 & -6 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 8 & -6 & -1 & m-5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -7 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & m-11 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -7 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m-7 \end{array}\right].$$

Đây là dạng bậc thang của ma trận mở rộng với dạng bậc thang của ma trận hệ số A ở bên trái. Rõ ràng ta có

+ rank(A) = 3 không phụ thuộc vào *m*.

+ rank([A| B]) = $\begin{cases} 3 & \text{khi } m = 7; \\ 4 & \text{khi } m \neq 7. \end{cases}$

Do đó (Hệ đã cho có nghiệm) ⇔ (rank(A) = 3 = rank([A| B])) ⇔ (*m* = 7).

2. Nhận xét: Đối với hệ (I), ta luôn có

a) rank(A) ≤ rank([A| B]) ≤ *m* (số phương trình). Bởi thế khi biết rank(A) = *m*, nói riêng *m* ≤ *n* (số ẩn), thì chắc chắn có đẳng thức rank(A) = rank([A| B]) và hệ có nghiệm.

b) Giả sử rank(A) = rank([A| B]) = r , 0 ≤ r ≤ min(*m*, *n*).

+ Nếu r = *n*, nói riêng *n* ≤ *m*, thì hệ có nghiệm duy nhất.

+ Nếu r < n thì hệ có vô số nghiệm phụ thuộc *n* – r tham số tùy ý. Ta sẽ thấy rõ điều này trong các ví dụ về giải hệ PTTT.

I.3.3. HỆ CRAMER VÀ CÔNG THỨC CRAMER

1. Hệ Cramer

Hệ PTTT n phương trình, n ẩn số với ma trân hệ số khả nghịch gọi là ***hệ Cramer***.

2. Định lý Cramer

Cho hệ Cramer n phương trình , n ẩn số với dạng ma trận AX = B. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất cho bởi công thức

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{bmatrix} \qquad (C)$$

Ở đây D = detA ≠ 0, D_j là định thức nhận được từ D khi thay cột j bởi cột tự do B, j = 1, 2, …, n. Công thức (C) được gọi là ***công thức Cramer***.

? Hãy liên hệ công thức Cramer với công thức nghiệm của hệ n phương trình, n ẩn số (n = 2, 3) đã biết trong đại số sơ cấp.

Ví dụ 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 21 \\ 7x_1 - x_2 - 3x_3 = 6 \end{cases}$

Ta có A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 7 & -1 & -3 \end{bmatrix}$; B = $\begin{bmatrix} 6 \\ 21 \\ 6 \end{bmatrix}$; detA = – 12;

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 21 & 3 & -4 \\ 6 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0; D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 2 & 21 & -4 \\ 7 & 6 & -3 \end{vmatrix} = -36; D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 21 \\ 7 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 36.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = -3$.

3. Nhận xét: Thật ra công thức Cramer chỉ có ý nghĩa lý thuyết chứ ***ít ý nghĩa trong thực hành*** khi n không bé ($n \geq 4$).

I.3.4. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP GAUSS

Ý tưởng cơ bản của phương pháp Gauss là biến đổi tương đương để khử dần ẩn số ở các phương trình từ trên xuống dưới. Trong ngôn ngữ ma trận, điều này đồng nghĩa với việc BĐSC (trên các dòng) của ma trận mở rộng để đưa nó về dạng bậc thang. Sau đó, giải hệ ngược từ dưới lên trên bằng cách thế dần các ẩn từ phải qua trái.

Bài toán: Giải hệ PTTT (tổng quát) m phương trình, n ẩn số

$$(I)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

1. Thuật toán giải bằng phương pháp Gauss

- **Bước 1: Lập ma trận mở rộng [A| B] của hệ (A là ma trận hệ số, B là cột tự do).**
- **Bước 2: BĐSC (trên các dòng của) ma trận mở rộng để đưa nó về dạng bậc thang. Từ đó tính được hạng của A và [A| B].**
  + Nếu rank(A) < rank([A| B]) thì kết luận hệ vô nghiệm. Thuật toán dừng.
  + Nếu rank(A) = rank([A| B]) = r thì hệ có nghiệm. Làm tiếp bước 3.
- **Bước 3: Từ ma trận bậc thang, viết lại hệ mới tương đương với hệ đã cho nhưng đơn giản hơn. Giữ lại ở vế trái r ẩn ứng với các hệ số đầu tiên khác không trên mỗi dòng khác không của ma trận bậc thang và gọi chúng là các *ẩn chính* (có đúng r ẩn chính). Các ẩn còn lại chuyển sang vế phải làm *ẩn tự do* (có n – r ẩn tự do). Sau đó xem các ẩn tự do như tham số và gán cho chúng các giá trị tùy ý rồi giải hệ ngược từ phương trình cuối lên phương trình đầu bằng cách thế dần dần các ẩn từ phải sang trái, từ dưới lên trên.**
- **Bước 4: Tóm tắt kết quả và kết luận về nghiệm của hệ.**

2. Chú ý

+ Nếu **r** = ***n*** (số phương trình) thì mọi ẩn đều là ẩn chính (không có ẩn tự do), hệ có nghiệm duy nhất.

+ Nếu **r** < ***n*** thì hệ có vô số nghiệm phụ thuộc n – r tham số tùy ý.

3. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 4. Giải và biện luận hệ phương trình cho ở ví dụ 3:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 1; \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 8; \\ 4x_1 + 9x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 6; \\ 5x_1 + 11x_2 - 7x_3 + 4x_4 - 6x_5 = m. \end{cases}$$

Giải Lập ma trân mở rộng rồi BĐSC như ở ví dụ 3 ta được ma trận bậc thang

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -7 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m-7 \end{array}\right].$$

Từ đó rank(A) = 3 ($\forall$ m), (rank([A| B]) = 3) $\Leftrightarrow$ ($m = 7$). Suy ra hệ chỉ có nghiệm khi $m = 7$. Lúc đó từ ma trận bậc thang ta viết được hệ mới tương đương với hệ cũ nhưng đơn giản hơn như sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 1 \\ x_2 + 8x_3 - 7x_4 + 4x_5 = 6 \\ x_4 - 5x_5 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 1 + 3x_3 + x_5 \\ x_2 - 7x_4 = 6 - 8x_3 - 4x_5 \\ x_4 = -4 + 5x_5 \end{cases}$$

Xem x_3, x_5 là tham số và gán cho chúng giá trị tùy ý: x_3 = a, x_5 = b; a, b là hai số thực tùy ý. Thay vào hệ và giải ngược từ dưới lên trên bằng cách thế dần ta được:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 1 + 3x_3 + x_5 \\ x_2 - 7x_4 = 6 - 8x_3 - 4x_5 \\ x_4 = -4 + 5x_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 53 + 19a - 71b; \\ x_2 = -22 - 8a + 31b; \\ x_3 = a; \\ x_4 = -4 + 5b; \\ x_5 = b. \end{cases} \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Kết luận: Ta được tập nghiệm của hệ đã cho là

$$\{(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) = (53 + 19a - 71b; -22 - 8a + 31b; a; -4 + 5b; b) \,/\, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Ta có thể viết tập nghiệm ở dạng cột $\left\{ X = \begin{bmatrix} 53 + 19a - 71b \\ -22 - 8a + 31b \\ a; \\ -4 + 5b \\ b \end{bmatrix} \,/\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Mỗi nghiệm X = $\begin{bmatrix} 53 + 19a - 71b \\ -22 - 8a + 31b \\ a; \\ -4 + 5b \\ b \end{bmatrix}$ (hoặc dạng dòng $(53 + 19a - 71b; -22 - 8a + 31b; a; -4 + 5b; b)$) được gọi là ***nghiệm tổng quát*** của hệ đang xét (phụ thuộc hai tham số a, b tùy ý). Khi ta gán cho a, b cặp giá trị cụ thể (nhưng bất kỳ) ta nhận được một ***nghiệm riêng*** của hệ.

I.3.4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

(HOMOGENEOUS SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS)

1. Định nghĩa: ***Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất*** là hệ phương trình có tất cả các hệ số tự do ở vế phải bằng 0:

$$(II)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Ở đây, cột tự do B = **O** nên dạng ma trân của hệ là AX = **O**. Ta cũng bảo hệ (II) là hệ thuần nhất tương ứng với hệ PTTT tổng quát (I) với dạng ma trận AX = B. Hai hệ này có vế trái giống hệt nhau.

2. Nhận xét:

a) Khác với hệ tổng quát có thể có nghiệm hoặc vô nghiệm, hệ thuần nhất luôn có nghiệm ít nhất một nghiệm, đó là nghiệm X = **O** (cột không). Ta gọi nghiệm X = **O** là nghiệm ***tầm thường***. Như vậy, đối với hệ thuần nhất, vấn đề ta quan tâm không phải là việc hệ có nghiệm hay không mà là ***hệ có nghiệm khác tầm thường hay không***.

b) Vì hệ PTTT thuần nhất là một hệ PTTT nên đương nhiên cũng giải được bằng phương pháp Gauss. Tuy nhiên vì cột tự do bằng không nên thay vì BĐSC ma trận mở rộng, ta ***chỉ cần BĐSC ma trận hệ số***.

3. Điều kiện có nghiệm không tầm thường của hệ thuần nhất

a) Hệ thuần nhất AX = **O** có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi **rank(A)** ***nhỏ hơn số ẩn***, hơn nữa lúc đó hệ có vô số nghiệm không tầm thường.

b) Trái lại, nếu **rank(A)** ***đúng bằng số ẩn*** thì hệ chỉ có nghiệm tầm thường và đó đương nhiên là nghiệm duy nhất của hệ.

4. Tính chất của tập nghiệm của hệ thuần nhất và hệ nghiệm cơ bản

a) Tập nghiệm của mỗi hệ thuần nhất có tính chất rất "đẹp" như sau:

+ Tổng (hiệu) của hai nghiệm lại là một nghiệm:

(X_1, X_2 là nghiệm) $\Rightarrow$ (X1±X2 là nghiệm).

+ Bội của mỗi nghiệm lại là một nghiệm: (a là số, X là nghiệm) $\Rightarrow$ (aX là nghiệm).

+ Giả sử hạng của ma trận hệ số là r với 0 < r < n (số ẩn). Khi đó như ta đã biết, hệ có vô số nghiệm phụ thuộc n – r tham số (ẩn tự do). Hơn nữa, ta luôn tìm được một hệ n – r nghiệm không tầm thường $\{X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}\}$sao cho tập

$$\{X = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_{n-r}X_{n-r} \ /\ \text{là } a_1, a_2, \ldots, a_{n-r} \text{ các số tùy ý}\}$$

chính là tập nghiệm của hệ thuần nhất đang xét. Hệ $\{X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}\}$ nói chung không duy nhất.

? Hãy chứng minh các tính chất này!

b) Hệ $\{X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}\}$ như trên gọi là ***hệ nghiệm cơ bản*** của hệ thuần nhất đang xét. Nói chung, mỗi hệ thuần nhất có vô số hệ nghiệm cơ bản. Mỗi $X = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_{n-r}X_{n-r}$ gọi là một ***nghiệm tổng quát*** của hệ. Khi gán cho các tham số $a_1, a_2, \ldots, a_{n-r}$ các giá trị cụ thể (nhưng tùy ý) ta được những ***nghiệm riêng*** của hệ. Để đơn giản, chúng ta sẽ chỉ nêu cách tìm hệ nghiệm cơ bản trong ví dụ.

Ví dụ 5. Tìm nghiệm tổng quát và hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Giải Lập ma trận hệ số A rồi BĐSC ta được:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & 7 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ta thấy rank(A) = 2 < 4 (số ẩn) nên hệ có vô số nghiệm phụ thuộc 2 tham số. Từ ma trận bậc thang ta viết hệ mới (tương đương với hệ đã cho) và giải ta được:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 5x_3 = x_2 - 7x_4 \\ x_3 = -3x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a + 8b \\ x_2 = 2a \\ x_3 = -6b \\ x_4 = 2b \end{cases} \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ đã cho là $(a + 8b, 2a, -6b, 2b)$ với a, b là cặp số thực bất kỳ.

Cho a = 1, b = 0 ta được nghiệm riêng dạng cột $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Cho a = 0, b = 1 ta được $X_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Ta được hệ nghiệm cơ bản của hệ chính là $\{X_1, X_2\}$.

? Hãy kiểm chứng điều này!

5. Liên hệ giữa nghiệm của hệ tổng quát và hệ thuần nhất tương ứng

a) Xét hệ tổng quát AX = B và hệ thuần nhất tương ứng AX = **O**. Giả sử X_r là một nghiệm riêng của hệ tổng quát. X_{tq}, X_{tn} lần lượt là nghiệm tổng quát của hệ tổng quát và hệ thuần nhất. Khi đó ta có: $X_{tq} = X_r + X_{tn}$. Nghĩa là:
Nghiệm tổng quát của hệ tổng quát bằng tổng của một nghiệm riêng của nó với nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất tương ứng.

b) Nhận xét: Nhờ tính chất trên, nếu bằng cách nào đó ta "dò" được một nghiệm của hệ tổng quát thì chỉ cần giải hệ thuần nhất (mà chắc chắn là đơn giản hơn giải hệ tổng quát), ta có thể suy ra nghiệm của hệ tổng quát.

Ví dụ 6. Giải hệ tổng quát dưới đây biết (1, 1, 0, – 1, 0) là một nghiệm riêng của nó.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = -3; \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1; \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 4. \end{cases}$$

<u>**Giải**</u> Trước hết ta giải hệ thuần nhất bằng cách BĐSC ma trận hệ số.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & -9 & -10 \\ 0 & 1 & 10 & -9 & -9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & -9 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Từ ma trận bậc thang ta viết hệ thuần nhất mới rồi giải tiếp ta được:

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & -3x_3 & +2x_4 & 4x_5 & =0 \\ & x_2 & +10x_3 & -9x_4 & -10x_5 & =0 \\ & & & & x_5 & =0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 17a + 16b \\ x_2 = 10a + 9b \\ x_3 = -a \\ x_4 = b \\ x_5 = 0 \end{cases} \quad a,b \in \mathbb{R}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ đã cho là

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 17a + 16b \\ x_2 = 1 + 10a + 9b \\ x_3 = -a \\ x_4 = -1 + b \\ x_5 = 0 \end{cases} \quad a,b \in \mathbb{R}.$$

I.4. MỘT SỐ MÔ HÌNH TUYẾN TÍNH TRONG KINH TẾ

I.4.1. MÔ HÌNH CÂN BẰNG THỊ TRƯỜNG (MARKET EQUILIBRIUM MODEL)

Một mô hình kinh tế thường bao gồm một số đại lượng (chỉ tiêu) trong kinh tế và các mối quan hệ giữa chúng. Theo ngôn ngữ toán học, các đại lượng kinh tế là các biến số, còn các mối quan hệ giữa các đại lượng kinh tế được biểu diễn bởi các phương trình. Một mô hình tuyến tính trong kinh tế là mô hình kinh tế mà tập hợp các quan hệ được biểu diễn bởi một hệ PTTT.

1. Mô hình cân bằng thị trường (đơn giản) một loại hàng hóa

Khi phân tích một thị trường hàng hóa, các nhà kinh tế học luôn sử dụng ***hàm cung*** và ***hàm cầu*** để biểu thị sự phụ thuộc của lượng cung và lượng cầu của hàng hóa (được tính trong một đơn vị thời gian nào đó) vào ***giá*** của hàng hóa đó (trong giả thiết các yếu tố khác không thay đổi). Trong mô hình này, ta chỉ xét một loại hàng hóa và chỉ quan tâm đến ba biến số dưới đây:

- Biến **giá** p (price): giá của loại hàng hóa đó (tính bằng đơn vị tiền tệ).
- **Hàm cung** Q_s (Quantity Supplied): lượng hàng hóa mà người bán bằng lòng bán.
- **Hàm cầu** Q_d (Quantity Demanded): lượng hàng hóa mà người mua bằng lòng mua.

Rõ ràng $Q_s = Q_s(p)$, $Q_d = Q_d(p)$ là các hàm số của biến giá p. Trong thực tiễn ta thấy rằng:

(i) Q_s là hàm tăng theo giá p và khi p lớn hơn một giá trị $p_0 > 0$ nào đó thì Q_s mới dương.

(ii) Q_d là hàm giảm theo giá p.

(iii) Thị trường ở trạng thái cân bằng khi $Q_s = Q_d$.

Mô hình $Q_s(p) = Q_d(p)$ được gọi là ***mô hình cân bằng thị trường (đơn giản) một loại hàng hóa***. Từ thực tiễn và cũng để đơn giản, ta giả sử $Q_s(p)$ và $Q_d(p)$ là các hàm bậc nhất, tức là có dạng tuyến tính $Q_s = -a_0 + a_1p$, $Q_d = b_0 - b_1p$, ở đây a_0, a_1, b_0, b_1 là các hằng số dương.

Mô hình cân bằng thị trường lúc này có dạng

$$\boxed{\begin{cases} Q_s = -a_0 + a_1 p \\ Q_d = b_0 - b_1 p \\ Q_s = Q_d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_s = -a_0 + a_1 p \\ Q_d = b_0 - b_1 p \\ -a_0 + a_1 p = b_0 - b_1 p \end{cases}}$$

Giải hệ phương trình (với ẩn là p), ta tìm được

+ Giá cân bằng p = $\overline{p} = \dfrac{a_0 + b_0}{a_1 + b_1}$; + Lượng (cung và cầu) cân bằng $\overline{Q} = \overline{Q_s} = \overline{Q_d} = \dfrac{a_1b_0 - a_0b_1}{a_1 + b_1}$.

Ví dụ 1. Cho hàm cung và hàm cầu theo giá của một loại hàng hóa là

$$Q_s = -5 + p,\ Q_d = 55 - 3p.$$

a) Tìm giá cân bằng thị trường.

b) Tìm lượng (cung và cầu) cân bằng.

<u>Giải</u> Giá cân bằng thị trường là nghiệm của phương trình

a) $Q_s = Q_d \Leftrightarrow -5 + p = 55 - 3p \Leftrightarrow p = 15$. Vậy giá cân bằng là p = $\overline{p}$ = 15 (đơn vị tiền tệ).

b) Lượng (cung và cầu) cân bằng là $\overline{Q} = \overline{Q_s} = \overline{Q_d}$ = 0 – 5 + 15 = 10 (đơn vị loại hàng hóa).

2. Mô hình cân bằng thị trường tổng quát nhiều loại hàng hóa

Bây giờ ta xét thị trường có *n* loại hàng hóa. Lúc đó, giá của hàng hóa này có thể ảnh hưởng đến lượng cung và lượng cầu của loại hàng hóa kia. Ta sẽ dùng các ký hiệu biến số như sau:

- Biến **giá** p_i: giá hàng hóa thứ i, i = 1, 2, …, *n*.
- **Hàm cung** Q_{si}: lượng cung hàng hóa thứ i, i = 1, 2, …, *n*.
- **Hàm cầu** Q_{di}: lượng cầu đối với hàng hóa thứ i, i = 1, 2, …, *n*.

Trong mô hình này, ta vẫn giả thiết các yếu tố khác không thay đổi, còn các hàm cung và hàm cầu phụ thuộc tuyến tính vào giá, tức là

$$Q_{si} = a_{io} + a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \ldots + a_{in}p_n;\ i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (1)$$

$$Q_{di} = b_{io} + b_{i1}p_1 + b_{i2}p_2 + \ldots + b_{in}p_n;\ i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (2)$$

Bấy giờ, mô hình cân bằng thị trường tổng quát đối với *n* loại hàng hóa được biểu diễn bởi các đẳng thức:

$$Q_{si} = Q_{di}\ ,\ i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Thay vào đẳng thức trên các biểu diễn (1), (2) của các hàm cung, cầu; sau đó chuyển vế và đặt $c_{ik} = a_{ik} - b_{ik}$, ta được hệ phương trình tuyến tính

$$\boxed{\begin{cases} c_{11}p_1 + c_{12}p_2 + \ldots + c_{1n}p_n = -c_{10}; \\ c_{21}p_1 + c_{22}p_2 + \ldots + c_{2n}p_n = -c_{20}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n1}p_1 + c_{n2}p_2 + \ldots + c_{nn}p_n = -c_{n0}. \end{cases}}$$

Giải hệ phương trình trên ta tìm được giá cân bằng của từng loại hàng hóa, từ đó tìm được lượng cung và cầu cân bằng của *n* loại hàng hóa đã cho.

Ví dụ 2. Xét một thị trường gồm ba loại hàng hóa. Hàm cung, hàm cầu và giá của chúng thỏa mãn các điều kiện sau

$$Q_{s1} = -2 + 4p_1 - p_2 - p_3;\quad Q_{s2} = -1 + p_1 + 4p_2 - p_3;\quad Q_{s3} = -2 - p_1 + p_2 + 4p_3;$$

$$Q_{d1} = 10 - 2p_1 + p_2 + p_3;\quad Q_{d2} = 1 + p_1 - 2p_2 + p_3;\quad Q_{d3} = 3 + p_1 + 2p_2 - 2p_3.$$

a) Hãy tìm giá cân bằng thị trường của từng loại hàng hóa.

b) Xác định lượng cung và cầu cân bằng của mỗi loại hàng hóa.

<u>Giải</u> Hệ phương trình xác định giá cân bằng là

$$\begin{cases} Q_{s1} = Q_{d1} \\ Q_{s2} = Q_{d2} \\ Q_{s3} = Q_{d3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 + 4p_1 - p_2 - p_3 = 10 - 2p_1 + p_2 + p_3 \\ -1 + p_1 + 4p_2 - p_3 = 1 + p_1 - 2p_2 + p_3 \\ -2 - p_1 + p_2 + 4p_3 = 3 + p_1 + 2p_2 - 2p_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6p_1 - 2p_2 - 2p_3 = 12 \\ \quad 6p_2 - 2p_3 = 2 \\ -2p_1 - p_2 + 6p_3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = 3; \\ p_2 = 1; \\ p_3 = 2. \end{cases}$$

Vậy, giá cân bằng mỗi loại là $\overline{p_1} = 3$, $\overline{p_2} = 1$, $\overline{p_1} = 2$. Ta cũng gọi bộ (3, 1, 2) là ***điểm cân bằng*** của thị trường. Suy ra, lượng hàng cân bằng của từng loại như sau

$$\overline{Q_{s1}} = \overline{Q_{d1}} = 7, \overline{Q_{s2}} = \overline{Q_{d2}} = 4, \overline{Q_{s3}} = \overline{Q_{d3}} = 4.$$

I.4.2. MÔ HÌNH CÂN BẰNG KINH TẾ VĨ MÔ

(MODEL OF MACROECONOMIC EQUILIBRIUM)

Ở dạng đơn giản, ta xét mô hình cân bằng đối với nền kinh tế đóng, tức là nền kinh tế không có quan hệ kinh tế đối ngoại. Trong mỗi nền kinh tế, ta luôn xét các đại lượng sau đây:

- Y (**Income**): tổng thu nhập quốc dân.
- E (**Expenditure**): tổng chi tiêu của nền kinh tế.
- C (**Consumption**): tổng tiêu dùng của dân cư.
- T (**Tax**): tổng thuế.
- I (**Investment**): mức đầu tư theo kế hoạch của chính phủ cho nền kinh tế.
- G (**Government**): mức chi tiêu của chính phủ.

Phương trình cân bằng trong nền kinh tế đóng là: Y = C + I + G.

Ta giả sử đầu tư theo kế hoạch của chính phủ (ít nhất là trong một khoảng thời gian không quá ngắn) là cố định $I = I_0$. Hơn nữa, chính sách tài khóa của chính phủ cũng cố định: $G = G_0$. Còn tiêu dùng (của dân chúng) thì đương nhiên phụ thuộc vào thu nhập. Ta giả sử hàm tiêu dùng có dạng bậc nhất: C = aY + b đối với biến thu nhập. Ở đây, 0 < b chính là ***lượng tiêu dùng tối thiểu*** khi không có thu nhập, còn 0 < a (< 1) biểu thị ***xu hướng tiêu dùng cận biên***, tức là ***lượng gia tăng của tiêu dùng khi thu nhập tăng thêm 1 đơn vị tiền tệ*** (sẽ hiểu thêm ý nghĩa của a khi học sang phần giải tích). Khi đó, mô hình cân bằng kinh tế vĩ mô dạng đơn giản được quy về hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} Y = C + I_0 + G_0 \\ C = aY + b \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} Y - C = I_0 + G_0 \\ -aY + C = b \end{cases}}$$

Ở đây Y, C là các ẩn cầm tìm, còn a, b, I_0, G_0 là các số đã biết. Giải hệ ta xác định được mức thu nhập cân bằng và mức tiêu dùng cân bằng của nền kinh tế (đóng) vĩ mô:

$$Y = \overline{Y} = \frac{b + I_0 + G_0}{1-a}; \quad C = \overline{C} = \frac{b + a(I_0 + G_0)}{1-a}.$$

Bây giờ, để cho gần với thực tế hơn, trước hết ta chú ý đến thuế thu nhập T. Lúc đó thu nhập được tính là ***thu nhập sau thuế*** hay ***thu nhập khả dụng*** (disposable income) Y_d. Vì thuế thường phụ thuộc vào thu nhập theo dạng hàm tuyến tính T = d + tY, ở đây 0 < d là thuế tối thiểu khi không có thu nhập, 0 < t (< 1) là ***tỉ suất thuế thu nhập*** hay ***thuế cận biên*** (tức là ***sự gia tăng của thuế khi thu nhập tăng lên 1 đơn vị tiền tệ***). Ta được

$$Y_d = Y - T = Y - d - tY = -d + (1-t)Y, \quad C = aY_d + b = -ad + a(1-t)Y + b.$$

Mô hình cân bằng nền kinh tế vĩ mô giờ đây trở thành hệ phương trình tuyến tính

$$\boxed{\begin{cases} Y = C + I_o + G_o \\ C = a(Y - T) + b \\ T = d + tY \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y - C = I_o + G_o \\ -aY + C + aT = b \\ -tY + T = d \end{cases}}$$

Ở đây Y, C, T là các ẩn số cần tìm, còn a, b, d, t và I_o, G_o là các số đã biết.
Giải hệ, ta tìm được mức thu nhập quốc dân, mức tiêu dùng và mức thuế cân bằng là

$$Y = \overline{Y} = \frac{b + I_0 + G_0 - ad}{1 - a(1-t)}\ ;\ C = \overline{C} = \frac{b + a(1-t)(I_0 + G_0) - ad}{1 - a(1-t)}\ ;\ T = \overline{T} = \frac{t(b + I_0 + G_0) + (1-a)d}{1 - a(1-t)}.$$

Nhận xét: Trong thực hành, khi cho số liệu cụ thể ta được các hệ PTTT đơn giản và giải dễ dàng chứ không cần phải nhớ các công thức trên.

Ví dụ 3. Cho tổng thu nhập quốc dân Y, mức tiêu dùng C và mức thuế T xác định bởi

$$Y = C + I_o + G_o;$$
$$C = 15 + 0,4(Y - T);$$
$$T = 36 + 0,1Y;$$

trong đó $I_o = 500$ (triệu USD) là mức đầu tư cố định; $G_o = 20$ (triệu USD) là mức chi tiêu cố định. Hãy xác định mức thu nhập quốc dân, mức tiêu dùng và mức thuế cân bằng.

<u>Giải</u> Ta có

$$\begin{cases} Y = C + 500 + 20 \\ C = 15 + 0,4(Y - T) \\ T = 36 + 0,1Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = Y - 520 \\ T = 0,1Y + 36 \\ Y - 520 = 15 + 0,4(Y - 0,1Y - 36) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C = Y - 520 \\ T = 0,1Y + 36 \\ 0,64Y = 520,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 293,4375 \\ T = 117,34375 \\ Y = 813,4375 \end{cases}.$$

Vậy $\overline{Y} = 813,4375$; $\overline{C} = 293,4375$; $\overline{T} = 117,34375$.

I.4.3. MÔ HÌNH IS – LM

Trong kinh tế vĩ mô, mô hình IS – LM (*Investment/Saving – Liquidity preference/Money supply*, tạm dịch là *Đầu tư/Tiết kiệm – Nhu cầu thanh toán/Tiền cung cấp ưu đãi*) do John Hicks (Anh) cùng Alvin Hansen (Hoa kỳ) đưa ra và phát triển. Mô hình này được dùng để phân tích trạng thái cân bằng của nền kinh tế trong cả hai thị trường: **thị trường hàng hóa và thị trường tài chính (tiền tệ)**. Ở mục trên, ta đã xét mô hình cân bằng kinh tế vĩ mô của nền kinh tế đóng

$$\boxed{\begin{cases} Y = C + I + G \\ C = aY + b, I = I_0, G = G_0 \end{cases} (0 < b,\ 0 < a < 1)}.$$

Với sự góp mặt của tiền tệ, một biến số có ý nghĩa quan trọng cần được xem xét là ***lãi suất*** r (interest rate) vì giá trị của tiền tệ thay đổi theo thời gian tùy theo r. Khác với mô hình cân bằng kinh tế vĩ mô ở đó ta giả thiết tổng đầu tư không đổi $I = I_0$, để xét ảnh hưởng qua lại giữa hai thị trường hàng hóa và tiền tệ, ta cần xem tổng đầu tư I thay đổi phụ thuộc vào lãi suất theo quy luật: ***lãi suất càng cao thì đầu tư càng giảm***. Nói cách khác, ta có ***hàm đầu tư*** $I = b_1 - a_1r$ ($a_1 > 0$, $b_1 > 0$). Lúc này phương trình cân bằng thị trường hàng hóa là

$$\begin{cases} Y = C + I + G \\ C = aY + b, I = b_1 - a_1r, G = G_0 \end{cases} \Leftrightarrow Y = aY + b + (b_1 - a_1r) + G_0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_1r = b + b_1 + G_0 - (1 - a)Y} \qquad \text{(IS)}$$

Phương trình biểu thị quan hệ giữa lãi suất và thu nhập khi thị trường hàng hóa cân bằng (tổng cung bằng tổng cầu) như trên được gọi là ***phương trình (IS)***. Ở đây, **thu nhập Y càng tăng thì lãi suất r càng giảm**. Trên mặt phẳng tọa độ với trục hoành biểu thị thu nhập và trục tung là lãi suất thì đường biểu diễn I_0 là **đường thẳng dốc đi xuống**. Đường thẳng đó gọi là ***đường IS***.

Trong thị trường tiền tệ, lượng cầu tiền mặt, ký hiệu L, đồng biến với tổng thu nhập và nghịch biến với r. Giả sử hàm cầu tiền có dạng tuyến tính: $L = b_2Y - a_2r$ ($a_2 > 0$, $b_2 > 0$).

Gọi lượng cung tiền mặt là M_0. Điều kiện cân bằng trong thị trường tiền tệ là

$$M_0 = L \Leftrightarrow M_0 = b_2Y - a_2r$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_2r = b_2Y - M_0} \qquad \text{(LM)}$$

Phương trình trên biểu thị sự cân bằng của thị trường tiền tệ và được gọi là ***Phương trình (LM)***. Ở đây, **thu nhập Y càng tăng thì lãi suất r cũng càng tăng**. Biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ với trục hoành biểu thị thu nhập và trục tung là lãi suất ta có ***đường LM***, đó là **đường thẳng dốc đi lên**.

Mô hình IS-LM được biểu thị bởi hệ hai phương trình (IS) và (LM).

$$\begin{cases} IS \\ LM \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1r = b + b_1 + G_0 - (1-a)Y \\ a_2r = b_2Y - M_0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a_1r + (1-a)Y = b + b_1 + G_0 \\ -a_2r + b_2Y = M_0 \end{cases}} \quad \text{(Y, r là hai ẩn số)}$$

Giải hệ trên, ta xác định được mức thu nhập $Y = \overline{Y}$ và lãi suất $r = \overline{r}$ đảm bảo cho sự cân bằng trong cả hai thị trường: hàng hóa và tiền tệ. Cụ thể ta được

$$\overline{Y} = \frac{a_2(b + b_1 + G_0) + a_1M_0}{a_1b_2 + a_2(1-a)}; \qquad \overline{r} = \frac{b_2(b + b_1 + G_0) - (1-a)M_0}{a_1b_2 + a_2(1-a)}.$$

Nhận xét: Tất nhiên, ta không cần nhớ các công thức trên. Trong thực hành, khi các dữ liệu được cho cụ thể, việc giải hệ mô hình IS-LM hết sức đơn giản.

Ví dụ 4. Cho $G_0 = 250$; $M_0 = 4500$; $I = 34 - 15r$; $C = 10 + 0,3Y$; $L = 22Y - 200r$.

a) Lập phương trình IS.

b) Lập phương trình LM.

c) Tìm mức thu nhập và lãi suất cân bằng của hai thị trường hàng hóa và tiền tệ.

<u>Giải</u> a) Ta có

$$Y = C + I + G_0 \Leftrightarrow Y = (10 + 0,3Y) + (34 - 15r) + 250.$$

Vậy phương trình IS là $15r = 294 - 0,7Y$.

b) Phương trình LM có dạng

$$L = M_0 \Leftrightarrow 22Y - 200r = 4500 \Leftrightarrow 200r = 22Y - 4500.$$

c) Mức thu nhập Y và lãi suất r cân bằng là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 15r = 294 - 0,7Y \\ 200r = 22Y - 4500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15(0,11Y - 22,5) = 294 - 0,7Y \\ r = 0,11Y - 22,5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2,35Y = 631,5 \\ r = 0,11Y - 22,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 268,72 \\ r = 7,06 \end{cases}.$$

Vậy $\overline{Y} = 268,72$; $\overline{r} = 7,06$.

I.4.4. MÔ HÌNH INPUT – OUTPUT CỦA LEONTIEF (INPUT-OUTPUT MODEL)

1. Mô hình Input – Output

Mục này giới thiệu mô hình **Input-Output** của Leontief, còn gọi là mô hình **I/O** hay mô hình **cân đối liên ngành.** Mô hình này đề cập đến việc xác định tổng cầu đối với sản phẩm của mỗi ngành sản xuất trong tổng thể nền kinh tế đa ngành của một quốc gia. Trong mô hình, khái niệm ngành kinh tế được xem xét theo nghĩa thuần túy sản xuất. Hơn nữa, mô hình được xét trong một vài giả thiết dưới đây.

- Mỗi ngành kinh tế chỉ sản xuất một loại hàng hóa.
- Mỗi ngành đều sử dụng một tỉ lệ cố định của các sản phẩm của ngành khác làm đầu vào cho sản suất đầu ra của mình.

- Khi đầu vào thay đổi *k* lần thì đầu ra cũng thay đổi *k* lần.

Xét một nền kinh tế gồm *n* ngành kinh tế (sản xuất) gọi quy ước là ngành 1, ngành 2, …, ngành *n*. Để tiện cho việc tính chi phí sản xuất, ta sẽ biểu thị lượng cầu của tất cả các loại hàng hóa ở dạng giá trị, tức là đo chung tất cả các loại sản phẩm khác nhau với đơn vị khác nhau bằng tiền (với đơn vị tiền tệ nào đó của quốc gia hoặc ngoại tệ mạnh). Trước hết, ta đưa vào một số khái niệm và ký hiệu cần cho mô hình.

- **Cầu trung gian** x_{ij}: là giá trị hàng hóa của ngành i mà ngành j cần dùng cho sản xuất, còn gọi là ***(lượng) cầu trung gian*** đối với sản phẩm của ngành i từ ngành j; i, j = 1, 2, …, *n*.
- **Cầu cuối** b_i: là giá trị hàng hóa của ngành i cần cho lao động, tiêu dùng, dịch vụ và xuất khẩu của quốc gia; i = 1, 2, …, *n*.
- **Tổng cầu mỗi ngành** x_i: là tổng cầu trung gian và cầu cuối của ngành i, i = 1, 2, …, *n*.

  Hiển nhiên, ta có

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + b_i;\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

$$\Leftrightarrow \quad x_i = \frac{x_{i1}}{x_1}x_1 + \frac{x_{i2}}{x_2}x_2 + \ldots + \frac{x_{in}}{x_n}x_n + b_i;\ i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (1)$$

Đặt $a_{ij} := \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ là tỉ lệ (cố định không đổi đối với mỗi i, j) của cầu trung gian đối với ngành i từ ngành j so với tổng cầu của ngành j; i, j = 1, 2, …, n. Hiển nhiên $0 \le a_{ij} \le 1$, $a_{ij} = 0$ khi và chỉ khi hàng hóa ngành i không cần sử dụng cho sản xuất của ngành j; i, j = 1, 2, …, n. Ý nghĩa của các hệ số a_{ij} như sau: a_{ij} chính là **tỉ phần chi phí mà ngành j phải trả cho ngành i để sản xuất ra 1 đơn vị giá trị hàng hóa của ngành j**. Để làm rõ hơn, ta giả sử dùng tiền USD. Khi đó, tính bình quân trong 1 USD giá trị hàng hóa của ngành j có a_{ij} USD dùng để trả cho việc mua sản phẩm của ngành i. Chẳng hạn, khi $a_{ij} = 0{,}3$ có nghĩa là tính bình quân để sản xuất ra 1 USD hàng hóa của mình, ngành j cần phải mua (sử dụng) 0,3USD giá trị hàng hóa ngành i. Từ các hệ thức (1) ta có hệ PTTT

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 \\ \quad\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n = b_1 \\ -a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 - \ldots - a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots + (1-a_{nn})x_n = b_n \end{cases}}$$

ở đây, các ẩn số là $x_1, x_2, \ldots, x_n$; còn các hệ số a_{ij}, b_i (i, j = 1, 2, …, n) đã cho cố định đối với một nền kinh tế trong một giai đoạn nhất định. Hệ này gọi là ***mô hình Input-Output*** hay ***mô hình cân đối liên ngành***. Giải hệ này ta sẽ tìm được tổng cầu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hay đầu ra của mỗi ngành trong nền kinh tế. Điều này ***có ý nghĩa quan trọng đối với việc lập kế hoạch sản xuất, đảm bảo cho nền kinh tế vận hành bình thường, tránh tình trạng dư thừa mặt hàng này hay thiếu hụt mặt hàng kia***.

Trong ngôn ngữ ma trận, ta xét các ma trận dưới đây.

- $A := [a_{ij}]_n$ là ma trận gồm các hệ số tỉ phần a_{ij} và được gọi là ***ma trận (hệ số) kỹ thuật*** hay ***ma trận (hệ số chi phí) đầu vào*** của nền kinh tế.
- $B := [b_i]_{n\times 1}$ là ***ma trận (cột) cầu cuối*** của nền kinh tế.
- $X := [x_i]_{n\times 1}$ là ***ma trận (cột) tổng cầu*** (đầu ra) của nền kinh tế.

Lúc này, hệ trên được viết lại ở dạng ma trận như sau: $X = AX + B \Leftrightarrow (I - A)X = B$.

Rõ ràng nếu I – A khả nghịch thì lời giải của hệ là duy nhất và cho bởi $X = (I - A)^{-1}.B$. Còn nếu $\det(I - A) = 0$ thì hệ có thể vô nghiệm, có thể vô số nghiệm.

2. Nhận xét

a) Trong nền kinh tế hoạt động bình thường**,** ma trận hệ số đầu vào $A = [a_{ij}]_n$ cho ta những thông tin sau đây:

+ Mỗi phần tử a_{ij} ở dòng i là tỉ phần giá trị hàng hóa mà ngành i bán cho ngành j làm hàng hóa trung gian để sản xuấ. Chẳng hạn $a_{ij} = 0,2$ tức là hàng hóa mà ngành i bán cho ngành j làm hàng hóa trung gian chiếm 20% giá trị hàng hóa của ngành j (i, j = 1, 2, …, *n*).

+ Tổng các phần tử trên cột j chính là tỉ phần chi phí đầu vào mà ngành j phải trả cho việc mua hàng hóa trung gian tính trên 1 đơn vị giá trị hàng hóa của mình, do đó không quá 1, tức là $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \le 1$; j = 1, 2, ..., *n*.

? Hãy tự lý giải điều này.

b) Hiệu a_{0j}: $= 1 - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \le 1$ chính là hệ số ***tỉ phần gia tăng trong tổng giá trị hàng hóa của ngành j*** (còn gọi là ***đầu vào đặc biệt của ngành j***), tức là bình quân trong mỗi 1 USD giá trị hàng hóa mà ngành j sản xuất ra có a_{oj} USD là giá trị tăng thêm, còn $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ là tổng chi phí đầu vào để có được 1 USD giá trị hàng hóa đó. Tính trên toàn bộ giá trị hàng hóa của ngành j, ta có tỉ phần giá trị gia tăng là $100a_{oj}$%, j = 1, 2, ..., *n*.

Ví dụ 5. Cho ba ngành kinh tế với ma trận hệ số đầu vào là

$$A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \end{bmatrix}.$$

Biết nhu cầu cuối cùng của các ngành lần lượt là 10, 5, 6.

a) Giải thích ý nghĩa của hệ số 0,3 ở dòng 3, cột 2 của ma trận đầu vào.

b) Tìm hệ số tỉ phần gia tăng a_{0j} của từng ngành (j = 1, 2, 3). Giải thích ý nghĩa của hệ số a_{01}.

c) Tìm đầu ra cho mỗi ngành.

<u>Giải</u> a) Để tiện ta giả sử các giá trị hàng hóa được quy về USD. Khi đó, hệ số $a_{32} = 0,3$ có nghĩa để sản xuất ra 1USD giá trị hàng hóa của ngành 2 cần mua 0,3USD giá trị hàng hóa của ngành 3.

b) Tổng các phần tử trên mỗi cột của ma trận A đều nhỏ hơn 1. Ta có các hệ số tỉ phần gia tăng của các ngành là

$$a_{01} = 1 - (a_{11} + a_{21} + a_{31}) = 1 - (0,2 + 0,4 + 0,1) = 0,3.$$
$$a_{02} = 1 - (a_{12} + a_{22} + a_{32}) = 1 - (0,3 + 0,1 + 0,3) = 0,3.$$
$$a_{03} = 1 - (a_{13} + a_{23} + a_{33}) = 1 - (0,2 + 0,2 + 0,2) = 0,4.$$

Hệ số a01 = 0,3 có nghĩa là tỉ phần giá trị gia tăng trong tổng giá trị hàng hóa của ngành 1 là 30%.

c) Ta có $I - A = \begin{bmatrix} 1-0,2 & -0,3 & -0,2 \\ -0,4 & 1-0,1 & -0,2 \\ -0,1 & -0,3 & 1-0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,3 & -0,2 \\ -0,4 & 0,9 & -0,2 \\ -0,1 & -0,3 & 0,8 \end{bmatrix}.$

Hệ Input –Output ở đây có dạng ma trận là

$$(I - A)X = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0,8 & -0,3 & -0,2 \\ -0,4 & 0,9 & -0,2 \\ -0,1 & -0,3 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix},$$

trong đó X là ma trận đầu ra, B là ma trận nhu cầu cuối cùng.

Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận I – A, ta được

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{0,384}\begin{bmatrix} 0,66 & 0,3 & 0,24 \\ 0,34 & 0,62 & 0,24 \\ 0,21 & 0,27 & 0,6 \end{bmatrix}.$$

Do đó

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = (I - A)^{-1} B = \frac{1}{0,384}\begin{bmatrix} 0,66 & 0,3 & 0,24 \\ 0,34 & 0,62 & 0,24 \\ 0,21 & 0,27 & 0,6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28,84 \\ 20,68 \\ 18,36 \end{bmatrix}.$$

Vậy, đầu ra của các ngành là $\overline{x_1}$ = 24,84; $\overline{x_2}$ = 20,68; $\overline{x_3}$ = 18,36.

BÀI TẬP CHƯƠNG I

I.1. Tính

a) $-5\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \\ -6 & 3 & 3 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -3 & 8 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$; b) $4\begin{bmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}^t - 3\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}^t$.

I.2. Thực hiện phép toán sau đây đối với các ma trận

a) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}^t + 2\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$; b) $-3\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -6 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$.

I.3. Tính

a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^3$; b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}^2$; c*) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{2013}$; d*) $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{2013}$; e*) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^n$; g*) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^n$;

$(n \in \mathbb{N})$.

I.4. Giải phương trình ma trận

a) Tìm ma trận X cấp 2×3 sao cho $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 7 \\ 13 & 18 & 17 \end{bmatrix}$.

b) Tìm ma trận X cấp 2×2 sao cho $X\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 7 \\ 13 & 18 & 17 \end{bmatrix}$.

c) Tìm các số a, b, c, d sao cho $\begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ 4 & 5 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & c \\ d & 64 \end{bmatrix}$.

I.5. BĐSC đưa các ma trận về dạng bậc thang (dòng) và tính hạng của chúng

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 5 & 8 & 1 & -1 & -5 \\ 5 & 11 & 18 & 10 & 9 & 6 \\ 8 & 18 & 29 & 10 & 6 & -2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 2 & -3 \\ 5 & 5 & 13 & 10 & 18 & -5 \\ 3 & 3 & 7 & 5 & 9 & 4 \\ 9 & 9 & 22 & 14 & 29 & -4 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & 11 & 9 & 7 & 15 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 8 & 2 & -1 \\ 9 & 20 & 16 & 12 & 26 & 2 & 6 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 5 & 11 & 9 & 11 & 15 & 7 & 5 \\ 3 & 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & -1 \\ 8 & 20 & 18 & 18 & 26 & 11 & 2 \end{bmatrix}$.

I.6. Tìm hạng (theo *m* nếu có) của các ma trận dưới đây. Với m nào thì hạng lớn nhất?

$a)\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$; $b)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & m \\ -2 & 8 & m \end{bmatrix}$; $c)\begin{bmatrix} 3 & m & 0 & 1 \\ 6 & 2m & m & 2 \\ 9 & 3m & 0 & m+2 \\ 15 & 5m & 0 & 7 \end{bmatrix}$;

$d)\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & -7 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -6 & m \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 8 & 8 \\ 3 & 2 & 8 & m+3 \\ 2 & 1 & 5 & m \end{bmatrix}$.

I.7. Tính định thức sau đây

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 & -2 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

e*) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \ldots & 2^{n-2} & 2^{n-1} \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & \\ 1 & n & n^2 & \ldots & n^{n-2} & n^{n-1} \end{vmatrix}$ ($2 < n$ tự nhiên).

I.8. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau đây

$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$; $b) B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

I.9. Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -2x_1 - 7x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$

I.10. Tìm nghiệm tổng quát và hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau đây

a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

I.11. Cho một thị trường gồm hai loại hàng hóa. Hàm cung, hàm cầu và giá của chúng thỏa mãn các điều kiện sau

$$Q_{s1} = -1 + 3p_1 \quad , \qquad Q_{s2} = -3 + 5p_2$$
$$Q_{d1} = 10 - 2p_1 + 2p_2 \, , Q_{d2} = 15 + p_1 - 3p_2.$$

a) Hãy tìm điểm cân bằng thị trường.
b) Xác định lượng cung và cầu cân bằng của mỗi loại hàng hóa.

I.12. Cho một thị trường gồm ba loại hàng hóa. Biết hàm cung và hàm cầu là

$$Q_{s1} = -15 + 8p_1 - p_2 - p_3$$
$$Q_{s2} = -10 - p_1 + 12p_2 - p_3$$
$$Q_{s3} = -6 - p_1 - p_2 + 10p_3$$
$$Q_{d1} = 20 - 4p_1 + 3p_2$$
$$Q_{d2} = 40 + 2p_1 - 6p_2 + p_3$$
$$Q_{d3} = 30 \qquad + 2p_2 - 6p_3$$

a) Hãy tìm điểm cân bằng thị trường.
b) Xác định lượng cung và cầu cân bằng của mỗi loại hàng hóa.

I.13. Xét mô hình cân bằng kinh tế vĩ mô với

$$Y = C + I_o + G_o$$
$$C = 50 + 0,6(Y - T),$$
$$T = 12 + 0,3Y$$
$$I_o = 800 \; ; \; G_o = 55.$$

Hãy xác định mức thu nhập quốc dân, mức tiêu dùng và mức thuế cân bằng.

I.14. Xét mô hình IS-LM với

$$G_0 = 75 \, ; M_0 = 8160 \, ; I = 50 - 25r$$
$$C = 40 + 0,5Y \, ; L = 28Y - 400r.$$

a) Xác định các phương trình IS, LM.

b) Xác định mức thu nhập và lãi suất cân bằng.

1.15. Trong mô hình Input – Output biết ma trận hệ số đầu vào của ba ngành là

$$A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0 & 0,2 \end{bmatrix}.$$

và nhu cầu cuối cùng của các ngành tương ứng là 40, 60 và 80. Hãy xác định đầu ra của mỗi ngành.

I.16. Cho ba ngành kinh tế với ma trận hệ số đầu vào là

$$A = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,3 & 0 & 0,1 \end{bmatrix}$$

a) Xác định hệ số tỉ phần gia tăng của mỗi ngành.

b) Xác định đầu ra của mỗi ngành biết nhu cầu cuối cùng của các ngành tương ứng là 40, 60, 80.

1.17. Giả sử một nền kinh tế có ba ngành: nông nghiệp, công nghiệp và dịch vụ. Biết rằng để sản xuất một đơn vị đầu ra

- ngành nông nghiệp cần sử dụng 10% giá trị của ngành, 30% giá trị của công nghiệp, 30% giá trị của dịch vụ;
- ngành công nghiệp cần sử dụng 20% giá trị của ngành, 60% giá trị của nông nghiệp, 10% giá trị của dịch vụ;
- ngành dịch vụ cần 10% giá trị của ngành, 60% giá trị của công nghiệp, không sử dụng giá trị của nông nghiệp.

a) Lập ma trận hệ số đầu vào cho nền kinh tế này.

b) Xác định mức sản xuất đầu ra của mỗi ngành để thỏa mãn nhu cầu cuối cùng là 10, 8, 4.